

Параллельные прямые.

Признаки параллельности прямых

Две прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. Любая прямая считается параллельной самой себе. Для обозначения параллельности прямых используется символ \parallel , например, $a \parallel b$.

Сформулируем и докажем признаки параллельности двух прямых, связанные с углами, образованными при пересечении двух прямых секущей.

Признаки параллельности двух прямых

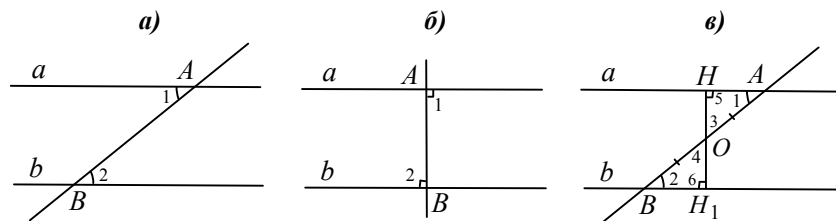
Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.

Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180° , то прямые параллельны.

Теорема. Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

Рис. 1



Дано: прямые a и b , AB – секущая,
 $\angle 1$ и $\angle 2$ – накрест лежащие углы,
 $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 1, а).

Доказать: $a \parallel b$.

Доказательство

Если $\angle 1$ и $\angle 2$ – прямые, то $a \perp AB$ и $b \perp AB$, следовательно, $a \parallel b$, т.к. две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны.

Рассмотрим случай, когда $\angle 1$ и $\angle 2$ не прямые.

Выполним дополнительные построения. Из точки O – середины отрезка AB , проведём отрезок $OH \perp a$. На прямой b от точки B отложим отрезок $BH_1 = AH$, проведём отрезок OH_1 к прямой b .

Рассмотрим $\triangle OHA$ и $\triangle OH_1B$. $AO = OB$, $AH = BH_1$ по построению; $\angle 1 = \angle 2$ по условию теоремы. Следовательно, $\triangle OHA = \triangle OH_1B$ по

I признаку равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними).

В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $\angle 3 = \angle 4$ и $\angle 5 = \angle 6$. Так как $\angle 3 = \angle 4$, то точка H_1 лежит на продолжении луча OH , то есть точки H , O и H_1 лежат на одной прямой. Т.к. $\angle 5 = \angle 6$, то $\angle 6$ – прямой, потому что $\angle 5$ – прямой по построению.

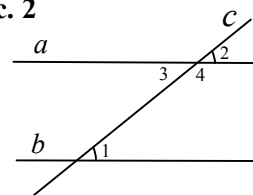
Получили, что $a \perp HH_1$ и $b \perp HH_1$, следовательно, $a \parallel b$, т.к. две прямые перпендикулярные третьей параллельны.

Итак, если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

Ч.т.д.

Теорема. Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.

Рис. 2



Дано: прямые a и b , c – секущая,
 $\angle 1$ и $\angle 2$ – соответственные углы,
 $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 2).

Доказать: $a \parallel b$.

Доказательство

$\angle 1 = \angle 2$ по условию; $\angle 2 = \angle 3$, так как они вертикальные. По свойству транзитивности $\angle 1 = \angle 3$. Но $\angle 1$ и $\angle 3$ – накрест лежащие углы, поэтому по доказанному выше признаку $a \parallel b$.

Итак, если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.

Ч.т.д.

Теорема. Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180° , то прямые параллельны.

Дано: прямые a и b , c – секущая,

$\angle 1$ и $\angle 4$ – односторонние углы, $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$ (рис. 2).

Доказать: $a \parallel b$.

Доказательство

$\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$ по условию, отсюда $\angle 1 = 180^\circ - \angle 4$. (1)

$\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$, т.к. $\angle 3$ и $\angle 4$ – смежные, отсюда $\angle 3 = 180^\circ - \angle 4$. (2)

Правые части равенств (1) и (2) равны, поэтому равны и левые части. Следовательно, $\angle 1 = \angle 3$. Но $\angle 1$ и $\angle 3$ – накрест лежащие, поэтому по доказанному выше признаку $a \parallel b$.

Ч.т.д.